

DS 6

e3a MPI 2024

Lycée Thiers - Physique-Chimie - MPI/MPI* - 2024-2025

CCB

Sujet MPI - Le devoir dure 3h.

Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.
La présentation globale de la copie ainsi que l'homogénéité des formules est prise en compte dans la notation.

Ce sujet est le problème I de l'épreuve e3a MPI 2024 (le problème II étant de la chimie, épreuve totale de 4h).

PROBLÈME 1

Quelques aspects de l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière.

Les notations et valeurs numériques des grandeurs utilisées dans ce problème sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide	c	$3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Permittivité du vide	ε_0	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	m_e	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

On note j le nombre complexe de partie imaginaire positive vérifiant $j^2 = -1$. En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , on convient d'associer à toute grandeur sinusoïdale $a(t) = A \cos(\omega t + \varphi_a)$ deux grandeurs complexes :

- la première, notée $\underline{A} = Ae^{j\varphi_a}$, appelée amplitude complexe associée à a ;
- la seconde, notée $\underline{a}(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi_a)} = \underline{A}e^{j\omega t}$, appelée grandeur sinusoïdale complexe associée à a .

Dans le cas où la grandeur sinusoïdale est un champ $a(\mathbf{M}, t) = A \cos[\omega t + f(\mathbf{M}) + \varphi_a]$, dépendant de la date t et de la position $\vec{\text{OM}}$ d'un point \mathbf{M} via une fonction f nulle lorsque \mathbf{M} est confondu avec O , on note $\underline{a}(\mathbf{M}, t) = \underline{A}e^{j[\omega t + f(\mathbf{M})]}$ la grandeur sinusoïdale complexe associée à a . À l'exception de j , les grandeurs complexes sont soulignées.

Les différentes parties de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres. Néanmoins, des notions et notations utiles sont introduites au fil du sujet. Aussi est-il conseillé de lire et de résoudre les parties du problème dans l'ordre de présentation.

I Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide

On se place dans le vide, milieu supposé n'avoir ni charge ni courant. On introduit un repère cartésien orthonormé direct $(\text{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un point \mathbf{M} quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Q1. Citer les quatre équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} dans ce milieu.

On rappelle que $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{\bullet}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{\bullet}) - \vec{\Delta} \vec{\bullet}$, où $\vec{\bullet}$ est un champ vectoriel et $\vec{\Delta}$ est l'opérateur laplacien vectoriel.

Q2. Obtenir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique \vec{E} . En déduire la relation entre c, ε_0 et μ_0 .

On considère une onde électromagnétique solution de l'équation de d'Alembert de type plane progressive monochromatique, de vecteur d'onde k et de pulsation temporelle ω . On suppose qu'elle se propage dans la direction et le sens de \vec{e}_z .

Q3. Montrer que les champs électrique et magnétique de l'onde sont transverses à l'aide de la notation complexe. On suppose le champ électrique \vec{E} de l'onde polarisé rectilignement selon \vec{e}_x . On note E_0 son amplitude et φ sa phase à l'origine du temps et de l'espace.

Q4. Donner l'expression du champ électrique réel de l'onde en un point \mathbf{M} à l'instant de date t , noté $\vec{E}(\mathbf{M}, t)$. On fera notamment apparaître E_0, ω et k .

Q5. Établir la relation entre k et ω , appelée relation de dispersion.

Q6. Obtenir l'expression du champ magnétique réel de l'onde en un point \mathbf{M} à l'instant de date t , noté $\vec{B}(\mathbf{M}, t)$.

Q7. Exprimer le vecteur de Poynting de l'onde en un point \mathbf{M} à l'instant de date t , noté $\vec{\Pi}(\mathbf{M}, t)$.

Q8. Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point \mathbf{M} à l'instant de date t , notée $w(\mathbf{M}, t)$, en fonction de $E_0, \omega, k, \varepsilon_0, t$ et de z .

Q9. On note T la période temporelle de l'onde plane progressive monochromatique. Montrer que les valeurs moyennes temporelles de $\vec{\Pi}$ et de w vérifient $\langle \vec{\Pi} \rangle_T = c \langle w \rangle_T \vec{e}_z = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_z$.

II Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

On s'intéresse à l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr. Dans ce modèle, le proton est supposé immobile et placé à l'origine O du repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'électron est soumis au champ électrique coulombien du proton et on néglige l'effet de son poids. Le moment cinétique \vec{L}_O de l'électron par rapport à O est quantifié : $\|\vec{L}_O\| = n \frac{h}{2\pi}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Q10. Montrer que \vec{L}_O est constant. En déduire que le mouvement de l'électron est plan.

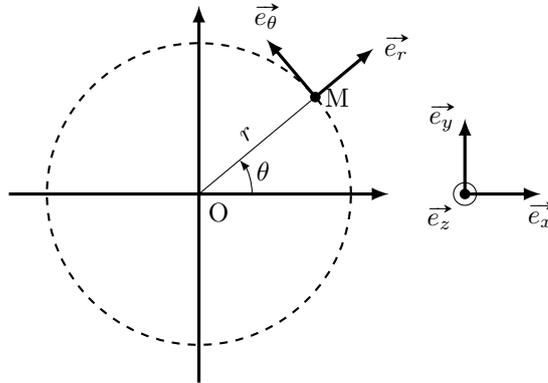


FIGURE 1 – Repérage d'un point M dans le plan du mouvement de l'électron.

On introduit le vecteur unitaire \vec{e}_z de telle sorte que \vec{L}_O soit de même direction et de même sens que \vec{e}_z . On introduit aussi la base locale cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ d'axe (O, \vec{e}_z) . Un point M du plan du mouvement est repéré par ses coordonnées cylindriques $(r, \theta, 0)$ comme indiqué sur la figure 1. On note donc $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$.

Q11. Exprimer L_O en fonction de m_e , r et de $\frac{d\theta}{dt}$.

On suppose que l'électron est en mouvement circulaire autour du proton.

Q12. Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

Q13. Obtenir l'expression de la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ de l'électron en fonction de e , m_e , ε_0 et du rayon R de sa trajectoire.

Q14. En déduire que le rayon de la trajectoire s'écrit $R = n^2 a_0$, où a_0 est le rayon de Bohr que l'on exprimera en fonction de e , m_e , ε_0 et de h . Calculer numériquement a_0 .

Q15. Citer la relation numérique entre le joule et l'électronvolt.

Q16. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron s'écrit $\mathcal{E}_m = -\frac{E_0}{n^2}$ et donner l'expression de E_0 en fonction de e , m_e , ε_0 et de h . Calculer la valeur numérique de E_0 exprimée en joule et en eV.

Q17. Citer la relation entre l'énergie d'un photon E_γ et sa longueur d'onde λ . Calculer, en joule et en eV, l'énergie d'un photon de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm.

Lorsqu'un photon est absorbé par un atome d'hydrogène, cela provoque une transition d'un niveau d'énergie repéré par l'entier n vers un niveau d'énergie repéré par l'entier p .

Q18. Donner, en fonction de E_0 , h , c , n et de p , l'expression des longueurs d'onde $\lambda_{n,p}$ des photons susceptibles d'être absorbés.

Q19. On admet que les transitions associées à des longueurs d'onde dans le visible sont obtenues pour $n = 2$. Donner les valeurs de p et $\lambda_{2,p}$ correspondant effectivement à une longueur d'onde dans le visible.

Q20. Que vaut l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire l'énergie minimale à fournir pour que l'électron échappe à l'attraction coulombienne du proton ?

III Pression de radiation

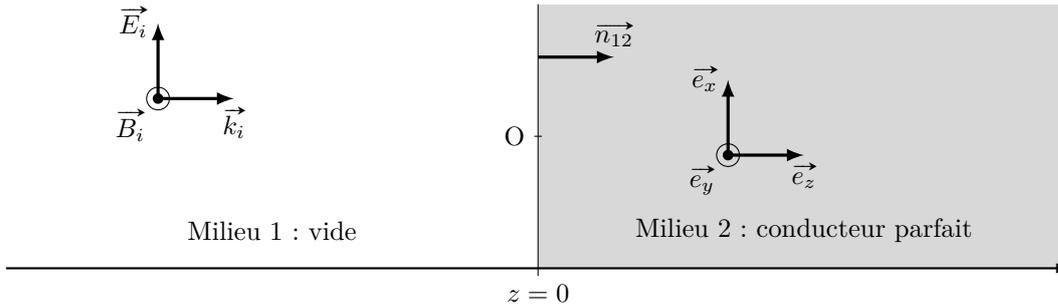


FIGURE 2 – Onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur parfait.

On considère la situation de la figure 2 où le demi-espace $z < 0$ est le vide et le demi-espace $z > 0$ est un conducteur parfait. Une onde incidente, identique à celle décrite dans les questions Q4 à Q6, est réfléchi sur la surface du conducteur. On notera respectivement \vec{k}_i , $\vec{E}_i(M, t)$ et $\vec{B}_i(M, t)$ le vecteur d'onde, le champ électrique et le champ magnétique de cette onde incidente en un point M à l'instant de date t . On donne les relations de passage utiles pour le problème. Entre deux milieux 1 et 2, on a :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

où \vec{n}_{12} est un vecteur unitaire orthogonal à l'interface, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, où les champs \vec{E}_1 et \vec{B}_1 (respectivement \vec{E}_2 et \vec{B}_2) sont les champs totaux dans le milieu 1 (respectivement dans le milieu 2) au voisinage de l'interface et où \vec{j}_s est le vecteur densité de courant de surface. On rappelle que les champs électrique et magnétique sont nuls dans un conducteur parfait.

- Q21.** Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$ en un point M à l'instant de date t . On supposera que l'onde électrique réfléchi conserve la même polarisation que l'onde incidente.
- Q22.** Déterminer l'expression du champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r(M, t)$ en un point M à l'instant de date t .
- Q23.** Que vaut le champ magnétique total en $z = 0^-$ (dans le vide au voisinage du conducteur)? En déduire l'expression du vecteur densité de courant de surface $\vec{j}_s(t)$ sur la surface du conducteur, à la date t .

On admet que $\vec{B}(z = 0, t) = \frac{1}{2} [\vec{B}(z = 0^-, t) + \vec{B}(z = 0^+, t)]$. En outre, en présence de courants surfaciques et d'un champ magnétique, la densité surfacique de la force de Laplace s'écrit $\vec{f}_s = \vec{j}_s \wedge \vec{B}$.

- Q24.** Exprimer la force de Laplace totale \vec{F}_L s'exerçant sur l'aire S de la surface du conducteur en fonction de ϵ_0 , E_0 , S , ω et de t .
- Q25.** Calculer la valeur moyenne de cette force sur une période temporelle T de l'onde. En déduire que l'on peut lui associer une pression p , dite pression de radiation, dont l'expression est $p = \epsilon_0 E_0^2$.

On appelle intensité I du champ électromagnétique la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting. On rappelle qu'en vertu de la relation démontrée dans la question Q9, on a $I = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}$.

- Q26.** Calculer numériquement la pression de radiation pour la lumière venant du soleil ($I_1 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$) et pour celle d'un laser de haute intensité ($I_2 = 1 \text{ GW} \cdot \text{m}^{-2}$).

On veut désormais retrouver l'expression de la pression de radiation en décrivant la lumière de manière corpusculaire, en la modélisant par un ensemble de photons se déplaçant dans un faisceau cylindrique d'axe \vec{e}_z et de section S . On prendra une longueur d'onde λ de 600 nm et on appelle E_γ l'énergie d'un seul photon.

- Q27.** On note n_γ^* la densité volumique de photons dans le faisceau (on se place dans le cadre d'un modèle simple où cette densité est uniforme). Exprimer n_γ^* en fonction de E_γ , c et de I puis calculer sa valeur numérique dans le cas du laser d'intensité I_2 .
- Q28.** Exprimer la quantité de mouvement \vec{p}_γ d'un photon en fonction de son énergie E_γ .
- Q29.** Déterminer l'expression vectorielle de la variation $\Delta \vec{p}_\gamma$ de la quantité de mouvement d'un photon lors d'un rebond sur la surface métallique en fonction de E_γ et de c . On fait l'hypothèse d'un rebond élastique, c'est-à-dire sans perte d'énergie cinétique.
- Q30.** Exprimer la variation de quantité de mouvement $\Delta \vec{p}_{dt}$ de l'ensemble des photons qui rebondissent sur la surface métallique d'aire S pendant une durée infinitésimale dt en fonction de I , S , dt et de c .
- Q31.** En déduire la force exercée par les photons sur l'aire S pendant une durée dt et retrouver l'expression de la pression de radiation.

IV Notion de force pondéromotrice

Le principe de la force pondéromotrice est qu'un électron oscillant dans un champ électrique harmonique uniforme subit en moyenne, sur une période, une force électrique résultante nulle. En revanche, avec un champ non uniforme, la force moyenne résultante n'est pas nulle. C'est ce qu'on appelle la force pondéromotrice. Celle-ci a de nombreuses applications, comme le piégeage ou l'accélération de particules chargées.

On considère un électron libre placé dans un champ électrique oscillant $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t)$ et on s'intéresse à son mouvement. On ne prend en compte que la seule composante électrique de la force de Lorentz. Pour simplifier, on considère un modèle à une dimension : $\vec{E}(x, t) = E_m(x) \cos(\omega t) \vec{e}_x$, le mouvement de l'électron étant lui aussi selon l'axe (Ox). Tout d'abord, on considère $E_m(x) = E_0$ constant.

Q32. Obtenir une valeur numérique limite de E_0 permettant de négliger le poids de l'électron par rapport à la force de Lorentz électrique. On fera intervenir l'accélération de pesanteur g .

Q33. Vérifier que la force moyenne sur une période exercée par le champ électrique sur l'électron est nulle.

En régime sinusoïdal forcé établi, la vitesse de l'électron à la date t est de la forme $v(t) \vec{e}_x = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) \vec{e}_x$.

Q34. Exprimer V_m en fonction de e , E_0 , m_e et de ω . Préciser la valeur du déphasage φ_v entre la vitesse et le champ électrique.

On note $x(t) \vec{e}_x = X_m \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{e}_x$ le vecteur déplacement de l'électron.

Q35. Exprimer X_m en fonction de e , E_0 , m_e et de ω . Préciser la valeur du déphasage φ_x entre la position et le champ électrique.

On considère désormais un champ non uniforme en adoptant un modèle affine simple : $E_m(x) = E_0 + \alpha x$, où α et E_0 sont deux constantes positives.

Q36. Quelle est l'unité de α ? Dans quel sens est orienté $\overrightarrow{\text{grad}}(E_m^2)$? Donner son expression en fonction de E_0 et de α , en supposant que $|\alpha x| \ll E_0$.

On admet que, à l'échelle d'une période, le mouvement de l'électron autour de $x = 0$ reste le même que celui décrit dans la question **Q35**.

Q37. Représenter le champ électrique et la force subie par l'électron lorsque $x = X_m$ et lorsque $x = -X_m$, en utilisant le fait que la position et le champ électrique sont en phase. Dans quel sens est la résultante de ces deux forces ? Que peut-on en déduire quant au sens de la force pondéromotrice ?

Q38. Calculer la force pondéromotrice subie par l'électron, définie comme la force moyenne sur une période exercée par le champ électrique sur l'électron. On l'exprimera en fonction de e , m_e , ω , E_0 et de α .

On trouve généralement comme expression de la force pondéromotrice :

$$\vec{f}_p = - \frac{q^2}{4m_e \omega^2} \overrightarrow{\text{grad}}(E_m^2)$$

Q39. Vérifier, sur la situation simple de variation linéaire de l'amplitude du champ décrite ci-dessus et avec le résultat de la question **Q36**, que l'on retrouve bien le résultat de la question précédente.

On trouve sur une page Wikipedia à propos de l'accélération plasma, la phrase suivante : « The Texas Petawatt laser facility at the University of Texas at Austin accelerated electrons to 2 GeV over about 2 cm ». Sa longueur d'onde est $\lambda = 632$ nm.

Q40. Avec un modèle simple d'énergie cinétique initiale nulle et de force constante, évaluer la valeur de la force pondéromotrice nécessaire pour obtenir cette accélération.

Q41. On considère que la puissance du laser $P = 1 \text{ PW} = 1 \cdot 10^{15} \text{ W}$ est répartie sur un faisceau de diamètre de 0,1 mm. Estimer le champ moyen E_0 de ce laser et en déduire la valeur de α requise pour produire la force calculée à la question précédente. On pourra utiliser la relation démontrée dans la question **Q9**.